Über eine Beweismethode in der Theorie der abstrakten Räume.

Von Paul Veress in Budapest.

In den folgenden Zeilen will ich mich mit einer Beweismethode befassen, die schon wiederholt angewandt wurde, ohne daß das dabei Prinzipielle betont und das allen diesen Beweisen Gemeinsame herausgehoben worden wäre.

Eine ähnliche Rolle hat auch das Borelsche oder das Borel–Lebesguesche Überdeckungstheorem gespielt.[1]) Eine schärfere Analyse zeigt aber, daß der Weg über die Intervallbedeckungen in vielen Fällen ein Umweg ist, es ist meist vorteilhafter, direkt mit den Aussagen zu operieren, die für die einzelnen Elemente gültig sind. So kann man den Satz I oder I′ des folgenden § 1 anwenden. Dieser Satz enthält den Borelschen, aber nicht den Borel–Lebesgueschen Satz[2]) und trotzdem kommt man mit ihm schon in den meisten Fällen aus, wo sonst der Borel–Lebesguesche Satz notwendig war. (S. die Beispiele des § 1.) Dies spricht eben dafür, daß das Wesentliche dieser Beweismethode in Satz I besser ergriffen wird, als im Borelschen. Dabei braucht man aber

---

[1]) Man vergleiche hierüber das zusammenfassende Referat von T. H. Hildebrandt: The Borel Theorem and Its Generalisations, *Bulletin of the American Math. Society*, **32** (1926), p. 423–474.

[2]) Der Borelsche Satz heißt: *Liegt jeder Punkt einer kompakten abgeschlossenen Menge in einem der Folge $i_1, i_2, i_3, \ldots$ von offenen Intervallen, so liegt die ganze Menge in der Summe von endlich vielen dieser Intervalle.* Der Borel–Lebesguesche Satz ist: *Liegt jeder Punkt einer kompakten abgeschlossenen Menge in einem eines beliebigen Systems von offenen Intervallen, so liegt die ganze Menge in der Summe von endlich vielen dieser Intervalle.* Kompakt wird eine Menge genannt, wenn sie keine unendliche Teilmenge ohne Häufungspunkt hat. Im n-dimensionalen euklidischen Raum ist kompakt gleichbedeutend mit „im Endlichen gelegen."

auch nicht Intervalle einzuführen in den Fällen, wo solche nicht schon natürlicher Weise gegeben sind; für das Aussprechen und den Beweis des Satzes I ist weder der Begriff der Entfernung, noch der einer Umgebung, ja nicht einmal der Begriff der Konvergenz und des Limes notwendig.

§ 1.

1. Man betrachte eine Menge M von beliebigen Elementen z (Zahlen, Punkte eines euklidischen Raumes, Funktionen, Mengen, kurz Elemente eines beliebigen abstrakten Raumes). Wir betrachten noch Aussagen $A_n(z)$ (bzw. abstrakte Mengen) deren jede für das beliebige Element $z \in M$ entweder gilt oder nicht gilt (bzw. das Element z enthält oder nicht). Solche Aussagen können z. B. sein:

für komplexe Zahlen z: $|z| < 1$;

für Funktionen $z = f(x)$: $f(x)$ ist stetig im Punkte a, oder: die Schwankung von $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ ist $< \varepsilon$;

für Punkte des Raumes $z = P$: P liegt im gegebenen Intervalle i.

Wenn daraus, daß $A_1(z)$ für irgendein Element z_0 gilt, folgt, daß $A_2(z)$ für dasselbe Element z_0 ebenfalls gültig ist, so sagen wir: die Aussage $A_2(z)$ folgt aus $A_1(z)$, in Zeichen $A_1(z) \rightarrow A_2(z)$.

Eine unendliche Folge von auseinander folgenden Aussagen

$$A_1(z) \rightarrow A_2(z) \rightarrow A_3(z) \rightarrow \dots$$

nennen wir eine *monotone* Folge.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen können wir aussprechen den

Satz I. *Ist eine Menge M der Elemente z und eine monotone Folge von Aussagen so gegeben, daß*

1. *zu jedem Elemente z von M eine Aussage $A_n(z)$ gehört, die für das Element z gilt;*

2. *zu jeder unendlichen Teilmenge M' von M eine Aussage $A_m(z)$ gehört, die für unendlich viele Elemente z aus M' gilt;*

dann gibt es eine Aussage $A_N(z)$, die für alle Elemente der Menge M gültig ist.

Der Beweis läßt sich nach bewährtem Muster folgendermaßen durchführen. Gilt $A_1(z)$ schon für alle $z \in M$, dann ist nichts mehr zu beweisen. Im entgegengesetzten Falle gibt es ein Element z_1, für welches $A_1(z)$ nicht gilt. Zu diesem z_1 gehört aber eine gültige

Aussage aus der Folge, sagen wir $A_{n_1}(z)$. Entweder gilt $A_{n_1}(z)$ schon für alle $z \in M$, oder aber gibt es ein Element z_2, für welches sie nicht gilt, aber $A_{n_2}(z)$ schon gültig ist. Man setze dieses Auswahlverfahren fort: gilt $A_{n_k}(z)$ nicht für alle Elemente, gilt es z. B. für z_{k+1} nicht, so bestimme man $A_{n_{k+1}}(z)$ so, daß dieses auch für z_{k+1} gültig sei. (Aus der Monotonität der Folge $A_n(z)$ folgt: $n_{k+1} > n_k$.) Ließe sich das Auswahlverfahren ins Unendliche fortsetzen, so käme man mit der Voraussetzung 2 in Widerspruch, denn in der Folge

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

ist jede Aussage $A_n(z)$ nur für endlich viele Glieder gültig. Infolgedessen muß es nach endlich viel (r) Schritten abbrechen, und dann gilt die letzte erhaltene Aussage $A_{n_r}(z)$ für alle Elemente $z \in M$.

Wenn man anstatt „die Aussage $A_n(z)$ gilt für das Element z" sagt: „die Menge A_n enthält z", kann man den Satz auch so formulieren:

Ist jedes Element der Menge M in einer Menge der monoton wachsenden Mengenfolge $A_1 < A_2 < A_3 < \ldots$ enthalten und liegen ferner aus jeder unendlichen Teilmenge M' von M unendlich viele Elemente in einer geeignet gewählten Menge A_m, dann ist die ganze Menge M in einer Menge A_N enthalten.

So formuliert ist der Satz sehr anschaulich, doch ist die erste Form für die Anwendungen bequemer.

2. Um für die Anwendungen gleich ein Beispiel zu geben, will ich beweisen, daß eine Funktion $f(x)$, die in jedem Punkte einer kompakten und abgeschlossenen Menge M eines metrischen Raumes stetig ist, auf M gleichmäßig stetig ist.

Zu der gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ definieren wir die Aussage $A_n(x)$ so: die Schwankung von $f(x)$ ist im Intervall,[3]) dessen Mittelpunkt x und dessen Länge $\frac{1}{2^n}$ ist, kleiner als ε.

Daß die Voraussetzung 1 des Satzes I erfüllt ist, also für jedes x eine gültige Aussage $A_n(x)$ zu finden ist ($n = n(x, \varepsilon)$), das bedeutet eben die Stetigkeit von $f(x)$ im Punkte x.

---

[3]) Dieses Intervall soll in einem allgemeinen metrischen Raum die Menge der Elemente bedeuten, die von x in einer Entfernung $\leqq \frac{1}{2^{n+1}}$ liegen.

Eine unendliche Teilmenge M' von M hat einen in M gelegenen Häufungspunkt x_0, da M kompakt und abgeschlossen ist. Gilt nun $A_m(x)$ für x_0, so gilt $A_{m+1}(x)$ für alle x, die im Intervalle der Länge $\frac{1}{2^{m+1}}$ um den Mittelpunkt x_0 liegen, d. h. für unendlich viele $x \in M'$. Die Voraussetzung 2 ist also auch erfüllt und so ergibt Satz I, daß eine Aussage $A_N(x)$ für alle Punkte $x \in M$ gültig ist und das heißt eben, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von x unabhängiges $\delta = \frac{1}{2^N}$ existiert, so daß die Schwankung von $f(x)$ auf jedem Intervalle, dessen Länge $\leqq \delta$ ist, kleiner als ε ausfällt.

Dieser Satz kann nicht direkt aus dem Borelschen, sondern nur aus dem Borel–Lebesgueschen Satz bewiesen werden, denn die zu benützenden, überdeckenden Intervalle haben die Mächtigkeit des Kontinuums, während Aussagen bezüglich der Stetigkeit, auf die es allein ankommt, in abzählbarer Zahl gestellt werden können.

3. Ich will noch zeigen, wie das Borelsche Überdeckungstheorem und zwar gleich in der allgemeinsten Form, für einen Hausdorffschen Raum, aus Satz I herauszulesen ist.

Hausdorffschen Raum nennen wir einen Raum, in dem Umgebungen definiert sind, die den vier Umgebungs-postulaten[4]) genügen. Die für metrische Räume bekannten Begriffe werden für diesen Raum einfach übertragen: z ist ein innerer Punkt der Menge M, wenn z eine Umgebung hat, die in M liegt. Eine Menge, die nur aus inneren Punkten besteht, ist offen. Der Punkt z ist Limes der Folge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ wenn für jede Umgebung U_z von z eine natürliche Zahl n existiert, so daß $z_\nu \in U_z$ für $\nu > n$. Konvergent ist eine Folge, die einen Limes hat; kompakt ist eine Menge, deren jede unendliche Teilmenge eine konvergente Teilfolge enthält

Nun sei eine kompakte abgeschlossene Menge M eines Hausdorffschen Raumes gegeben und dazu eine Folge von offenen Mengen $u_1, u_2, u_3, \ldots$, so daß jeder Punkt $z \in M$ in mindestens einer dieser Mengen u_n enthalten ist. Als Aussage $A_n(z)$ betrachte man

[4]) S. E. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914), p. 213. Hausdorff nennt diesen Raum *topologisch*, doch da von anderen Autoren diese Bezeichung in einem anderen Sinne gebraucht wird, sagen wir nach Fréchet (*Les éspaces abstraits* (Paris, 1929), p. 167, Fußnote) Hausdorffschen Raum.

folgendes: der Punkt z ist in der Summe $U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ enthalten. Voraussetzung 1 ist offenbar erfüllt. Ist ferner M' eine unendliche Teilmenge von M, so hat M' einen Häufungspunkt z_0 in M. Ist $z_0 \in U_m$, so sind die Punkte von M', die in einer bestimmten Umgebung von z_0 liegen, ebenfalls in u_m (weil u_m offen ist) und so auch in U_m enthalten. Solche Punkte gibt es aber unendlich viele, da z_0 ein Häufungspunkt von M' ist. Die zweite Voraussetzung ist also ebenfalls erfüllt, daher gilt ein $A_N(z)$ für alle $z \in M$, d. h. die Menge M ist in der Summe

$$U_N = u_1 + u_2 + \ldots + u_N$$

enthalten.

4. Bilden die Aussagen $A_1(z), A_2(z), A_3(z), \ldots$ keine monotone Folge, so kann man an ihrer Stelle eine andere, monotone Folge einführen, indem man als $A'_n(z)$ die Aussage definiert, daß für das Element z mindestens eine der Aussagen $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_n(z)$ gültig ist, wofür man auch schreiben kann:

$$A'_n(z) = A_1(z) \vee A_2(z) \vee \ldots \vee A_n(z).$$

Beim Beweis des Borelschen Theorems haben wir vorhin schon diese Methode angewandt. Sind die weiteren Voraussetzungen des Satzes I erfüllt, so gibt es eine für alle $z \in M$ gültige Aussage $A'_N(z)$, was auf die ursprünglichen Aussagen angewandt besagt, daß es endlich viele unter ihnen gibt, so daß für jedes $z \in M$ eine von diesen endlich vielen Aussagen besteht. Für manche Anwendungen empfiehlt es sich diesen Satz besonders auszusprechen.

S a t z I'. *Ist eine Menge M der Elemente z und eine Folge von Aussagen $A_1(z), A_2(z), A_3(z), \ldots$ so gegeben, daß*

1. *zu jedem Elemente z von M eine gültige Aussage $A_n(z)$ gehört,*

2. *zu jeder unendlichen Teilmenge M' von M gibt es eine Aussage $A_m(z)$, die für unendlich viele Elemente von M' gilt,*

dann gibt es einen endlichen Abschnitt der Folge so, daß für jedes Element $z \in M$ eine Aussage dieses Abschnittes gültig ist.

Anwendungen kann dieser Satz in der Theorie der reellen Funktionen und auch in den Elementen der Analysis reichlich finden. Fast überall, wo der Borel–Lebesguesche Satz angewendet wird, kommt man direkter zum Ziel durch den Satz I oder I', man hat nur die Aussagen entsprechend zu definieren. Nur wo die Elemente selbst Mengen sind und die Aussagen sich auf

„. . . enthalten sein" beziehen, ist die Anwendung des Borel–Lebesgueschen Satzes vorteilhafter.

5. Von den vielen möglichen Anwendungen sei es mir erlaubt, als Beispiel noch eine, den Beweis des folgenden Satzes anzuführen:

Sind die Funktionen $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ und $f(x)$ auf der kompakten, abgeschlossenen Menge M eines metrischen Raumes stetig und konvergiert $f_\nu(x)$ gegen $f(x)$ für $\nu \to \infty$, so ist die Konvergenz quasigleichmäßig.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir an, daß die positive Zahl ε gegeben ist. Die Aussage $A_n(x)$ definieren wir folgendermaßen: es ist $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Wegen der Kovergenz $f_\nu(x) \to f(x)$ gibt es für jeden Punkt x eine gültige Aussage $A_n(x)$, wo $n = n(x, \varepsilon)$.

Eine beliebige unendliche Teilmenge M' von M hat mindestens einen in M gelegenen Häufungspunkt x_0. Für diesen Häufungspunkt x_0 sei $A_m(x)$ gültig, d. h.

$$a_m = |f_m(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Nun gibt es infolge der Stetigkeit von $f_m(x)$ und $f(x)$ zu x_0 ein $\delta_m > 0$ und ein $\delta > 0$, so daß

$$|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon - a_m}{2}, \text{ wenn } |x - x_0| < \delta_m, \tag{2}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon - a_m}{2}, \text{ wenn } |x - x_0| < \delta. \tag{3}$$

Ist $0 < \delta' \leqq \delta_m$ und $\delta' \leqq \delta$, so gelten die Ungleichungen (1), (2) und (3) gleichzeitig für $|x - x_0| < \delta'$, es ist also auch

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ wenn } |x - x_0| < \delta'.$$

Die Aussage $A_m(x)$ gilt also für alle x, die in genügender Nähe von x_0 sind, daher für unendlich viele $x \in M'$, da x_0 ein Häufungspunkt von M' ist.

Die Voraussetzungen des Satzes I' sind mithin erfüllt, es gibt also endlich viele Aussagen $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_N(x)$, so daß für jedes $x \in M$ eine dieser Aussagen erfüllt ist, also eine der Ungleichungen

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

stattfindet.

Dasselbe gilt aber für die Folge

$$f_r(x), f_{r+1}(x), f_{r+2}(x), \ldots,$$

die dieselben Voraussetzungen erfüllt, wie die Folge $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ Wir können also sagen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder natürlichen Zahl r eine natürliche Zahl $N > r$ gibt so, daß für jedes $x \in M$ eine der Ungleichungen:

$$|f_r(x)-f(x)|<\varepsilon, \ |f_{r+1}(x)-f(x)|<\varepsilon, \ldots, |f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$$

stattfindet und das heißt eben soviel, daß die Konvergenz quasigleichmäßig ist.

§ 2.

6. Das Erfülltsein der Voraussetzung 2 haben wir in den vorhergehenden Anwendungen immer daraus gefolgert, daß die Menge der Elemente kompakt war und die Aussage, welche für das Limeselement gültig war, in einer gewissen Umgebung des Limes auch bestanden hat. Auf diese Weise bekommt man notwendige Bedingungen dafür, daß eine gegebene Menge kompakt sei.

Kriterien für kompakte Mengen in den speziellen metrischen Räumen sind schon verschiedentlich aufgestellt worden.[5]) Die Frage mußte aber für jeden Raum separat — und nicht immer auf ganz einfache Weise — behandelt werden. Ich will nun zeigen, daß die Notwendigkeit dieser Kriterien in allen Fällen aus Satz II ohne jede weitere Überlegung direkt herauszulesen ist. Man braucht dabei die Metrik des Raumes nicht vorauszusetzen, es sei denn, daß diese Kriterien selbst sich auf Entfernungen beziehen.

Die weiteren Ausführungen können also auf einen Raum L bezogen werden, in dem die Konvergenz einer Folge von Elementen definiert ist.[6]) Es ist also außer den Elementen des Raumes noch eine Vorschrift gegeben, mittels welcher man entscheiden kann, ob eine gegebene Folge konvergent ist oder nicht, und mittels der man im Falle der Konvergenz das Limeselement (das dem Raume angehört) bestimmen kann. Die Vorschrift soll den Fréchetschen zwei Postulaten genügen.[6])

Hat eine Aussage die Eigenschaft, daß sie, wenn sie für das Limeselement einer Folge gilt, für alle Elemente der Folge von einem gewissen an ebenfalls gültig ist, so nennen wir die Aussage *stetig*. Eine Menge des Raumes L nennen wir kompakt, wenn sie

---

5) Vgl. die Fußnoten 7)—11).

6) Vgl. M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendiconti di Palermo*, 22 (1906), p. 1—74; vgl. insb. p. 5.

endlich ist, oder falls sie unendlich ist, jede unendliche Teilmenge von ihr eine in dem obigen Sinne konvergente Teilfolge enthält.

Wir nehmen noch an, daß eine monotone Folge von stetigen Aussagen

$$A_1(z) \rightarrow A_2(z) \rightarrow A_3(z) \rightarrow \ldots$$

so gegeben ist, daß für jedes Element des Raumes eine Aussage der Folge gültig ist. Dieses Bestehen einer Aussage der Folge $A_n(z)$ kann eben die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ausdrücken, daß das Element dem Raum angehöre.

Ist nun M eine kompakte Menge, so enthält jede unendliche Teilmenge M' von ihr eine konvergente Folge, deren Limes M angehören kann oder nicht. Jedenfalls gilt aber für dieses Limeselement, als Element des Raumes L, eine Aussage $A_m(z)$ und dann gilt diese wegen der Stetigkeit von $A_m(z)$ für unendlich viele Glieder der Folge — also ist auch die Voraussetzung 2 des Satzes I erfüllt. So hat man den

Satz II. *Gilt für jedes Element eines Raumes L eine der stetigen Aussagen*

$$A_1(z) \rightarrow A_2(z) \rightarrow A_3(z) \rightarrow \ldots,$$

die eine monotone Folge bilden, so gibt es für jede kompakte Menge M des Raumes L eine natürliche Zahl N, so daß die Aussage $A_N(z)$ für alle Elemente von M gilt.

Wie man sieht, genügt es, anstatt der Stetigkeit der Aussagen nur soviel vorauszusetzen, daß wenn $A_n(z)$ für den Limes einer Folge gilt, so gibt es eine natürliche Zahl p so daß $A_{n+p}(z)$ für alle Glieder der Folge von einem gewissen an gültig ist. Für diesen Fall sagen wir: die Aussagen bilden eine *stetige, monotone Folge.*

7. Als erstes Beispiel wählen wir den Raum der auf einer kompakten, abgeschlossenen Menge eines metrischen Raumes der Variablen x erklärten stetigen Funktionen $z = f(x)$. Konvergenz soll jetzt gleichmäßige Konvergenz bedeuten. Jedes Element des Raumes ist eine gleichmäßig stetige Funktion (vgl. § 1, Nr. 2), als $A_n(z)$ kann also zu irgendeinem $\varepsilon > 0$ die Aussage definiert werden, daß die Schwankung von $f(x)$ in jedem Intervall der Länge $\frac{1}{2^n}$ kleiner als ε ist. Diese Aussagen sind stetig, also gibt es laut Satz II für eine kompakte Menge der stetigen Funktionen ein N so, daß für alle Funktionen $f(x)$ der kompakten Menge und für alle Stellen x:

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon \text{ ist, falls } |x-x'|<\frac{1}{2^N},$$

d. h. die Funktionen sind *gleichartig* gleichmäßig stetig.[7])

8. Die Elemente des Hilbertschen Raumes sind die Punkte z mit den abzählbar vielen reellen Koordinaten

$$z=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

für die $\sum_1^\infty x_\lambda^2$ konvergent ist. Als Aussage $A_n(z)$ kann also hier:

$$r_n(z)=\{x_{n+1}^2+x_{n+2}^2+x_{n+3}^2+\ldots\}^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

gewählt werden.

Die Konvergenz der Folge $z^{(\nu)}\to z$ bedeutet

$$(z^{(\nu)}, z)=\left\{\sum_1^\infty (x_\lambda^{(\nu)}-x_\lambda)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\to 0.$$

Die Stetigkeit der Aussagen $A_n(z)$ folgt aus

$$r_n(z^{(\nu)})\leqq r_n(z)+(z^{(\nu)}, z).$$

Auf Grund des Satzes II gibt es also zu einer kompakten Menge M des Hilbertschen Raumes für jedes $\varepsilon>0$ ein N so, daß

$$r_N(z)<\varepsilon$$

ist für alle $z\in M$.[8])

9. Für die in $\langle a, b\rangle$ meßbaren Funktionen kann als Aussage $A_n(z)$ zu irgendeinem $\varepsilon>0$ folgendes gewählt werden: es gibt eine Menge e, mit $m(e)<\varepsilon$ so, daß wenn man das Intervall $\langle a, b\rangle$ in n gleiche Teilintervalle: $i_1, i_2, \ldots, i_n$ teilt, die Schwankung von $z=f(x)$ auf jeder Menge $i_k e$ kleiner als ε ausfällt $(k=1, 2, \ldots, n)$. Für jedes Element dieses Raumes gibt es eine gültige Aussage $A_n(z)$; versteht man unter Konvergenz die Konvergenz *dem Maße nach*, so sind diese Aussagen stetig, also folgt aus Satz II für eine kompakte Menge dieses Raumes die Existenz

---

[7]) C. Arzelà: Sulle funzioni di linee, *Memorie delle R. Accademia delle Scienze di Bologna*, (5) **5** (1895—96), p. 225—244.

[8]) M. Fréchet, Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel, *Rendiconti di Palermo*, 30 (1910), p. 1—26.

einer für alle Elemente der kompakten Menge gültige Aussage $A_N(z)$.[9])

Sind die Funktionen außerdem quadratisch integrierbar, so können die kompakten Mengen auf Grund der Konvergenz im Mittel definiert werden, für eine in diesem Sinne kompakte Menge ist wieder obige Bedingung notwendig.[10]) Das ergibt (neben der in Nr. 8) eine zweite Lösung der gestellten Frage für den Hilbertschen Raum.

10. Als Raum der Jordanschen Kurven betrachten wir die topologischen (umkehrbar eindeutigen und stetigen) Bilder des abgeschlossenen Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$. Eine Folge $K_1, K_2, K_3, \ldots$ von solchen Kurven nennen wir gegen K konvergent, wenn es eine topologische Abbildung von K_ν auf K so gibt, daß die maximale (euklidische) Entfernung der entsprechenden Punkte auf K_ν und K gegen Null konvergiert. Als Aussage $A_n(K)$ gilt hier: man kann die Kurve so in n Bogen teilen, daß die maximale Entfernung von irgend zwei Punkten jedes Teilbogens kleiner als ε wird. Diese Aussage ist stetig, also gibt es für eine kompakte Menge der Jordanschen Kurven zu jedem $\varepsilon > 0$ eine gültige Aussage $A_N(K)$: die Kurven einer kompakten Menge sind gleichmäßig teilbar.[11])

§ 3.

11. Jede kompakte Menge eines metrischen Raumes ist beschränkt. (Dies kann man auch aus Satz II ersehen.) Es gilt aber noch mehr: jede kompakte Menge eines metrischen Raumes ist *total beschränkt*, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$, gibt es n Elemente (eine endliche Basis) der kompakten Menge M:

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \qquad n = n(\varepsilon),$$

so daß jedes Element $z \in M$ zu irgendeinem z_i kleinere Entfernung als ε hat. Es können nämlich nur endlich viele Elemente in M sein, deren Entfernung paarweise $\geqq \varepsilon$ ist, sonst enthielte die unendliche Folge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ mit $(z_i, z_k) \geqq \varepsilon$ für $i \neq k$ keine konvergente Teilfolge.

---

[9]) M. Fréchet, Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables, *Fundamenta Math.*, 9 (1927), p. 25—32; P. Veress, Über Funktionenmengen, *diese Acta*, 3 (1927), p. 177—192.

[10]) P. Veress, l. c. [9]) p. 192.

[11]) M. Fréchet, l. c. [6]) p. 60.

Daraus und aus Satz II folgt unmittelbar der Borel–Lebesguesche Satz für metrische Räume, den wir analog dem Satz II so aussprechen:

Satz III. *Es sei M eine kompakte, abgeschlossene Menge eines metrischen Raumes; mit $\{A(z)\}$ bezeichnen wir ein System stetiger Aussagen über die Elemente z. Gilt für jedes $z \in M$ eine dieser Aussagen, so gibt es endlich viele unter ihnen: $A_1(z)$, $A_2(z), \ldots, A_n(z)$ so, daß für jedes $z \in M$ ein $A_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gültig ist.*

Für den Beweis definieren wir als $A'_\nu(z)$ folgende Aussage: für z gilt mindestens eine solche Aussage $A(z)$, die auch für alle $\zeta \in M$, für die $(\zeta, z) < \frac{1}{\nu}$, gültig ist.[12] Die Aussagen $A'_\nu(z)$ bilden eine stetige monotone Folge, ferner gilt für jedes $z \in M$ eine von ihnen; also gilt laut Satz II eine Aussage $A'_N(z)$ für alle $z \in M$. Das heißt aber, daß es für jedes $z \in M$ ein $A(z)$ gibt, das für z und für alle $\zeta \in M$ mit $(\zeta, z) < \frac{1}{N}$ gilt. Es sei die zu $\varepsilon = \frac{1}{N}$ gehörige Basis der Menge M: $z_1, z_2, \ldots, z_r$, $A_i(z)$ sei die Aussage, die für $(z_i, z) < \frac{1}{N}$ gilt, dann gilt für jedes Element $z \in M$ eine der Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_N$.

12. Ich erwähne noch einen Satz über kompakte Mengen, der im Satz II nicht, nur im Satz III enthalten ist.

Als Elemente des Raumes betrachten wir jetzt meßbare Funktionen, die auf einer meßbaren Menge E erklärt sind; Entfernung soll die obere Grenze des absoluten Wertes der Differenz der beiden Funktionen in E sein. Konvergenz heißt also gleichmäßige Konvergenz. Die Funktionen einer in diesem Raume kompakten Menge M liegen zwischen zwei festen (nur von M abhängigen) Schranken.

Es ergibt sich nun aus Satz III: Ist M eine kompakte Menge der meßbaren Funktionen $z = f(x)$, so läßt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ die Menge E in endlich viele, elementenfremde meßbare Teilmengen so einteilen, daß die Schwankung von jeder Funktion der

---

[12]) Die in Nr. **6** gegebene Definition der Stetigkeit ist in metrischen Räumen mit folgender äquivalent: gilt $A(z)$ für z, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß $A(z)$ auch für alle $\zeta \in M$ gilt, für die $(\zeta, z) < \delta$ ist.

Menge M auf jeder Teilmenge kleiner als ε ist.[13]) Dies ist nämlich eine stetige Aussage, deren Gültigkeit für eine einzige beschränkte meßbare Funktion selbstverständlich ist.

13. Der Satz, daß eine kompakte Menge totalbeschränkt ist, ist für vollständige, metrische Räume umkehrbar, wie man es durch das Schachtelprinzip leicht einsieht: jede totalbeschränkte Menge eines vollständigen, metrischen Raumes ist kompakt. Auf Grund dieses Satzes beweist man leicht, daß die Beschränktheit und die Gültigkeit der betreffenden Aussagen in Nr. **7—10** zusammen auch hinreichend sind dafür, daß die Menge kompakt sei. Der Beweis läßt sich in allen Fällen der Nr. **7—10** am einfachsten durchführen, indem man zu gegebenem $\varepsilon > 0$ die Basis konstruiert.[14])

(Eingegangen am 29. April 1932.)

---

[13]) Vgl. P. Veress, Über kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen, *Fundamenta Math.*, **7** (1925), p. 244—249.

[14]) Vgl. P. Veress, l. c. [9]).